

УДК 517.929

Основные квазинормальные формы для двухкомпонентных систем параболических уравнений

Кащенко С.А.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

получена 1 сентября 2011

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, квазинормальная форма, малый параметр

Приводится перечень основных квазинормальных форм, которые возникают при анализе динамики нелинейных сингулярно возмущенных параболических уравнений в случаях, близких к критическим в задачах об устойчивости.

Введение. Рассматривается вопрос о локальной – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамике двух типов нелинейных систем параболических уравнений

$$a(\alpha) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = (D_0 + \varepsilon D_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \varepsilon^\alpha A_1)u + F(u, u)$$

и

$$b(\alpha) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = (D_0 + \varepsilon D_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \varepsilon^\alpha A_1)u + F(u, \frac{\partial u}{\partial x})$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x).$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$, матрица диффузии $D(\varepsilon) = D_0 + \varepsilon D_1$ при всех достаточно малых ε имеет собственные значения с положительными вещественными частями, достаточно гладкая нелинейная вектор-функция $F(u)$ имеет в нуле порядок малости выше первого. Относительно нелинейной вектор-функции $F(u, v)$ предполагаем, что она линейна по каждому аргументу (тем самым, $F(0, v) = F(u, 0) = 0$). Параметры ε и α положительны, причем параметр ε является достаточно малым, т.е. $0 < \varepsilon \ll 1$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственные контракты №П2223, № 14.740.11.0873)

Важную роль играет расположение корней характеристического уравнения линейной системы на нулевом состоянии равновесия системы

$$\det(A_0 + \varepsilon^\alpha A_1 - n^2(D_0 + \varepsilon D_1) - \lambda I) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det A_0, \quad a_0 = \operatorname{Sp} A_0 = a_1 + a_4.$$

Предполагается, что среди его корней нет таких, вещественные части которых положительны и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$, но есть корни, стремящиеся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\Delta \geq 0, \quad a_0 \leq 0.$$

В том случае, когда оба собственных значения D_0 имеют положительные вещественные части, характеристическое уравнение при $\varepsilon=0$ может иметь не более четырех корней на мнимой оси. Тогда при малых ε исходная краевая задача имеет устойчивое локальное инвариантное многообразие, размерность которого совпадает с количеством таких корней, а поведение всех решений при $t \rightarrow \infty$ из достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля определяется поведением решений только на этом инвариантном многообразии. Исходная краевая задача на нем может быть записана в виде специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений – нормальной формы. Эти результаты хорошо известны, и на них здесь не останавливаемся.

Ниже предполагаем, что рассматриваемые системы являются сингулярно возмущенными, то есть матрица D_0 имеет нулевое собственное значение. В этом случае теория инвариантных интегральных многообразий, вообще говоря, места не имеет, и метод нормальных форм непосредственно неприменим. В [1–5] был разработан специальный метод построения так называемых квазинормальных форм (КНФ) – специальных нелинейных эволюционных уравнений, не содержащих малый параметр. Динамика таких уравнений определяет поведение решений исходных краевых задач.

В §1 приведен перечень КНФ в случаях, когда матрица D_0 нулевая: $D_0=0$. В §2 предполагается, что у D_0 одно собственное значение нулевое, а другое – положительное, а в §3 матрица D_0 имеет вид $D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В работах [1–5] приведены явные формулы для всех фигурирующих ниже коэффициентов и получены формулы, связывающие решения исходных краевых задач и решения КНФ. Отметим лишь особую роль фигурирующего ниже вещественного параметра \varkappa . Этот параметр изменяется от $-\infty$ до ∞ , и все уравнения следует рассматривать для каждого значения \varkappa . Тем самым можно говорить о том, что КНФ в данном случае являются семейства уравнений.

Отметим еще, что вместо периодических краевых условий можно рассматривать краевые условия Дирихле ($u(t,0)=u(t,1)=0$) или Неймана ($\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 0$). Соответствующие изменения для КНФ (по сравнению с периодическими краевыми

условиями) несущественны, поэтому приводить их отдельно не будем. В наиболее интересной ситуации такие КНФ приведены в [1].

§ 1. Малая диффузия

1.1. Случай простого нулевого собственного значения матрицы A_0 .

Здесь ξ – вещественная 2π -периодическая по y скалярная переменная; все параметры вещественны.

$$a(\alpha) : \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \xi + \delta \xi^2,$$

$$b(\alpha) : \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \xi + \kappa \delta \xi \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

где $d \geq 0$. Если $d=0$, то вместо слагаемого $\kappa^2 d \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$ имеем $\kappa^4 d_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4}$ и $d_1 \geq 0$.

Если $\delta=0$, то

$$a(\alpha) : \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \xi + \delta_1 \xi^3,$$

$$b(\alpha) : \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \xi + \kappa^2 \left[\delta_1 \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \delta_2 \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Через τ обозначено медленное время $\tau = \varepsilon^\alpha t$; $y = (\kappa \varepsilon^{(\alpha-1)/2} + \theta)x$ (при $\alpha=1$ имеем $\kappa=1$, $\theta=0$). При $0 < \alpha < 1$ вместо

$$\kappa \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{стоит оператор} \quad L_n = \left(\kappa_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \kappa_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right).$$

1.2. Случай пары чисто мнимых собственных значений матрицы A_0 .

Здесь ξ – комплексная 2π -периодическая по y скалярная переменная; все параметры комплексны.

$$a(\alpha) : \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \xi + \delta |\xi|^2 \xi,$$

$$b(\alpha) : \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \xi + \kappa^2 \left[\delta_1 \xi \left| \frac{\partial \xi}{\partial y} \right|^2 + \delta_2 |\xi|^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta_3 \xi^2 \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial y^2} + \delta_4 \bar{\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right].$$

1.3. Случай нулевого собственного значения матрицы A_0 .

Здесь ξ – комплексная 2π -периодическая по y скалярная переменная; все параметры вещественны.

$$a(\alpha), b(\alpha) \text{ при } 0 < \alpha < 1 : \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma \xi + \delta |\xi|^2 \xi,$$

$$a(1), b(1) : \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2i\theta \frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta^2 \xi \right] + \gamma \xi + \delta |\xi|^2 \xi.$$

Замечание. Случай пары чисто мнимых собственных значений у $A(z_0)$ при $z_0 > 0$ для двухкомпонентных систем не реализуется.

1.4. Случай пары чисто мнимых собственных значений A_0 и нулевого собственного значения $\mathbf{A}(\mathbf{z}_0)$ при $z_0 > 0$.

Здесь 2π -периодические по y переменные ξ и η – комплексные.

$$a(\alpha) : \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma_1 \xi + \xi [\delta_1 |\xi|^2 + \delta_2 |\eta|^2], \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \kappa^2 d_2 \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2i\theta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \theta^2 \eta \right] + \gamma_2 \eta + \eta [\delta_3 |\xi|^2 + \delta_4 |\eta|^2], \end{cases}$$

$$b(\alpha) : \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma_1 \xi + \delta_0 \xi |\eta|^2 + \\ + \kappa^2 \left[\delta_1 \xi \left| \frac{\partial \xi}{\partial y} \right|^2 + \delta_2 |\xi|^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta_3 \xi^2 \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial y^2} + \delta_4 \bar{\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \kappa^2 d_2 \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2i\theta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \theta^2 \eta \right] + \gamma_2 \eta + \eta [\delta_5 |\xi|^2 + \delta_6 |\eta|^2]. \end{cases}$$

§ 2. Контрастные структуры

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_0(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$a_1=0, \quad \text{Sp} A_0 = a_4 \leq 0, \quad \Delta = \det A \geq 0.$$

2.1. Случай $1/2 \leq \alpha \leq 1$, $\Delta \neq 0$, $a_4 \neq 0$, ξ и все параметры вещественные.

$$a(\alpha) : \quad \kappa^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y^2} = \kappa^4 \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} + \kappa^2 a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \Delta \xi + \delta \kappa^4 \left[\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 - M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right]$$

с периодическими краевыми условиями $\xi(\tau, y + 2\pi) \equiv \xi(\tau, y)$ и $M(\xi(\tau, y)) = 0$. Здесь приняты обозначения

$$M(f(\tau, y)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, y) dy.$$

$$b(\alpha) : \quad \kappa^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y^2} = \kappa^4 \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} + \kappa^2 a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \Delta \xi + \delta \kappa^5 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3}$$

с теми же краевыми условиями.

2.2. Случай $0 < \alpha < 1/2$, $\Delta \neq 0$, $a_4 \neq 0$, ξ и все параметры вещественные.

2.2.1. Быстро осциллирующие структуры.

В этом случае получаем те же уравнения, что и в п. 2.1, но без слагаемого $\Delta\xi$. Поэтому их можно записать в виде параболических уравнений относительно $w = \kappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{11}w + \delta \kappa^2 f,$$

для $a(\alpha)$:
$$f = w^2 - M(w^2),$$

для $b(\alpha)$:
$$f = \kappa w \frac{\partial w}{\partial y}.$$

2.2.2. Медленно осциллирующие структуры.

$$a(\alpha) : \quad \kappa^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y^2} = \kappa^2 a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \Delta \xi + \delta \kappa^4 \left[\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 - M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right],$$

$$b(\alpha) : \quad \kappa^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y^2} = \kappa^2 a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \Delta \xi + \delta \kappa^5 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3}.$$

2.2.3. Структуры для $a(\alpha)$, зависящие и от медленно, и от быстро осциллирующих пространственных переменных.

$$\kappa_1^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y_1^2} = \kappa_1^4 \frac{\partial^4 \xi}{\partial y_1^4} + \kappa_1^2 a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta \kappa_1^2 \left[\kappa_1^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \right)^2 - \kappa_1^2 M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \right)^2 \right) + 2 \kappa_2^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_2^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \kappa_2^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau \partial y_2^2} &= \kappa_2^2 a_{11} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_2^2} + \Delta \eta + \\ &+ \delta \kappa_2^2 \left[\kappa_2^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y_2^2} \right)^2 - \kappa_2^2 M \left(\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y_2^2} \right)^2 \right) + \kappa_1^2 M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \right)^2 \right) - \kappa_1^2 M \left(M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \right)^2 \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

2.3. Случай $0 < \alpha \leq 1$, $\Delta = -a_2 a_3 = 0$.

Пусть $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} a(1) : \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial x^2} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - a_4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (a_{11} - a_4) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_3 a_{21} \xi + \\ &+ \delta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right)^2 + (\delta_1 + \delta_2) a_3 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) \xi + \delta_3 a_3^2 \xi^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(1) : \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial x^2} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - a_4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (a_{11} - a_4) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_3 a_{21} \xi + \delta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \delta_1 a_3 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \delta_2 a_3 \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \xi + \delta_3 a_3^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial x}; \end{aligned}$$

а для $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$ верны формулы из раздела 1.1.

2.4. Случай $a_2 \neq 0, a_3 = 0$.

$$a(1) : \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial x^2} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - a_4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_{11} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) + \\ + a_2 a_{21} \xi + \delta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right)^2 + \kappa a_2 \xi^2;$$

$$b(1) : \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial x^2} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - a_4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_{11} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) + \\ + a_2 a_{21} \xi + \delta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \kappa a_2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial x};$$

а для $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$ верны формулы из раздела 1.1.

2.5. Пусть $a_2 = a_3 = 0$. Тогда для $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ при $0 < \alpha \leq 1$ верны формулы из раздела 1.1.

§ 3. Сингулярно возмущенные системы при $D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$D(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d_1 & d_2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2), \quad d_1 > 0, \quad d_2 > 0.$$

$1/2 < \alpha \leq 1, a_3 \geq 0, \Delta \geq 0, a_0 = a_1 + a_4 \leq 0$.

3.1. Пусть $a_3 = 0, \Delta = 0, a_0 < 0$. Тогда

$$a(1) : \quad a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + (d_1 a_2 + a_{21}) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (a_{11} a_4 - a_{21} a_2) \xi + \delta_1 \xi^2 - \delta_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\xi^2),$$

$$a(\alpha) \ (1/2 < \alpha < 1) : \quad a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\kappa^2 d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + a_{21} \xi - \delta_2 \xi^2).$$

$$b(1) : \quad a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + (d_1 a_2 + a_{21}) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (a_{11} a_4 - a_{21} a_2) \xi + \delta_1 \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{2} \delta_2 \frac{\partial^3}{\partial x^3}(\xi^2),$$

$$b(\alpha) \ (1/2 < \alpha < 1) : \quad a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\kappa^2 d_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + a_{21} \xi - \frac{1}{2} \delta_2 \kappa \frac{\partial}{\partial y}(\xi^2) \right).$$

3.2. Пусть $a_4 = 0, a_0 = 0, a_1 \neq 0$. Тогда

$$a(1) : \quad a_1 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + (d_1 a_2 + a_{21}) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (a_1 a_{22} - a_2 a_{21}) \xi + \\ + \delta_1 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_2 \xi \right)^2 + \delta_2 a_1^2 \xi^2 - \delta_3 \xi \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_2 \xi \right),$$

$$a(\alpha) \ (1/2 < \alpha < 1) : \quad a_1 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \kappa^4 d_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} - a_{21} \kappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta_1 \kappa^4 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2.$$

$$b(1) : \quad a_1 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + (d_1 a_2 + a_{21}) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (a_1 a_{22} - a_2 a_{21}) \xi + \delta_1 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_2 \xi \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \delta_2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} - \delta_3 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_2 \xi \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} - \delta_4 \xi \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right),$$

$$b(\alpha) \ (1/2 < \alpha < 1) : \quad a_1 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \varkappa^4 d_1 \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} - a_{21} \varkappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta_1 \varkappa^5 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3}.$$

3.3. Пусть $a_3 > 0$, $\Delta = 0$, $a_0 = 0$. Тогда

$$a(1) : \quad 2a_3^{3/2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial s} = \varepsilon \left[-d_1 a_3 \frac{\partial^4 \xi}{\partial s^4} + a_3^{3/2} d_2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} + a_1 (d_1 a_1 + d_2 a_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + \right. \\ \left. + a_3 a_{21} \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - a_3^{3/2} a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial s} - \delta_1 \xi + a_3 P(\xi, \eta, \alpha) - a_1 P(\xi, \eta, \beta) + \right. \\ \left. + a_3^{3/2} \frac{\partial}{\partial s} P(\xi, \eta, \beta) - M(a_3 P(\xi, \eta, \alpha) - a_1 P(\xi, \eta, \beta)) \right],$$

$$\xi(t, s + 2\pi) \equiv \xi(t, s), \quad M(\xi) = 0.$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon^\alpha A_1) \eta + \varepsilon \left[F(\eta, \eta) + f_1 M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 \right) \right] + f_2 M(\xi^2).$$

Здесь приняты обозначения

$$P(\xi, \eta, \nu) = p_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 + p_2 \xi^2 + p_3 \xi \frac{\partial \xi}{\partial s} + p_4 \eta_1 \xi + p_5 \eta_1 \frac{\partial \xi}{\partial s} + p_6 \eta_2 \frac{\partial \xi}{\partial s}.$$

$$a(\alpha) \ (1/2 < \alpha < 1) : \quad a_3^{3/2} \varkappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial s} = -d_1 a_4 \varkappa^4 \frac{\partial^4 \xi}{\partial s^4} + a_3 a_{21} \varkappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + \\ + \delta_1 \varkappa^3 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 + a_3 \varkappa^2 (\delta_2 \eta_1 + \delta_3 \eta_2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2},$$

$$\xi(\tau, s + 2\pi) \equiv \xi(\tau, s), \quad M(\xi) = 0.$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon^\alpha A_1) \eta + \varepsilon^\alpha \left[F(\eta, \eta) + d_1 M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 \right) \right].$$

Здесь $\tau = \varepsilon^{\gamma_0} t$, $\gamma_0 = (3\alpha + 1)/2$, $s = (\varkappa \varepsilon^{(\alpha-1)/2} + \theta)(\sqrt{a_3} t + x)$, $\varkappa \neq 0$ — произвольно фиксировано, $\theta = \theta(\varkappa \varepsilon) \in [0, 1)$ и дополняет до целого выражение $\varkappa \varepsilon^{(\alpha-1)/2}$.

$$b(1) : \quad 2a_3^{3/2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial s} = \varepsilon \left[-d_1 a_3 \frac{\partial^4 \xi}{\partial s^4} + a_3^{3/2} d_2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} + a_1 (d_1 a_1 + d_2 a_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + \right. \\ \left. + a_3 a_{21} \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - a_3^{3/2} a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial s} - a_1 [a_1 a_{21} + a_3 a_{22}] \xi + a_3 Q(\xi, \eta, \alpha) - a_1 Q(\xi, \eta, \beta) + \right. \\ \left. + a_3^{1/2} \frac{\partial}{\partial s} Q(\xi, \eta, \beta) - M(a_3 Q(\xi, \eta, \alpha) - a_1 Q(\xi, \eta, \beta)) \right],$$

$$\xi(t, s + 2\pi) \equiv \xi(t, s), \quad M(\xi) = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon^\alpha A_1)\eta + \varepsilon g M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 \right),$$

где

$$Q(\xi, \eta, \nu) = q_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \frac{\partial \xi}{\partial s} + q_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \xi + q_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 + q_4 \frac{\partial \xi}{\partial s} \xi + q_5 \eta_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} +$$

$$+ q_6 \eta_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + q_7 \eta_1 \frac{\partial \xi}{\partial s} + q_8 \eta_2 \frac{\partial \xi}{\partial s},$$

$b(\alpha) \ (1/2 < \alpha < 1) :$

$$2a_3^{3/2} \varkappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial s} = -d_1 a_4 \varkappa^4 \frac{\partial^4 \xi}{\partial s^4} + a_3 a_{21} \varkappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} +$$

$$+ \delta \varkappa^4 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \right) \right) + a_3^{1/2} [q_5 \eta_1 + q_6 \eta_2] \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3},$$

$$\xi(\tau, s + 2\pi) \equiv \xi(\tau, s), \quad M(\xi) = 0.$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = A_0 \eta + \varepsilon^\alpha \left[A_1 \eta + F(\eta, \eta) + g M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \right)^2 \right) \right].$$

Общее замечание. При $\alpha < 1$ следует рассмотреть все уравнения с заменой

$$\varkappa \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{на} \quad \left(\varkappa_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \varkappa_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right).$$

Список литературы

1. Кащенко С. А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1053.
2. Кащенко С. А. Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 262–270.
3. Kashchenko S. A. Normalization in the Systems with Small Diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. No. 6. P. 1093–1109.
4. Kashchenko S. A. Bifurcational Features in Systems of Nonlinear Parabolic Equations with Weak Diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15. No. 11. P. 3595–3606.
5. Кащенко И. С. Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией // ДАН. 2010. Т. 435. № 2. С. 164–167.

Principal Quasinormal Forms for Two-Component Systems of Parabolic Equations

Kaschenko S.A.

Keywords: delay differential equation, quasinormal form, small parameter

The article includes principal quasinormal forms of singular perturbed parabolic equations systems in critical cases.

Сведения об авторе:

Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического моделирования